

Dimensionsanalytische Methoden zur Optimierung zerstäubungstechnischer Prozesse in der Verfahrenstechnik

**- Scale-up beziehungsweise Scale-down
am Beispiel eines Rotationszerstäubers-**

Zweite überarbeitete und korrigierte Fassung

Dimensionsanalytische Methoden zur Optimierung zerstäubungs- technischer Prozesse in der Verfahrenstechnik¹

1. Einleitung

Düsen und Zerstäuber spielen in einer Vielzahl verfahrenstechnischer Anwendungen eine wichtige Rolle. Stoff- und Wärmeübergänge, das Beschichten von Oberflächen sowie das Verbrennen von Kraftstoffen sind nur einige Beispiele, in denen spezifische Eigenschaften von Sprays für die Effizienz des Gesamtprozesses maßgeblich sind. Daher ist es erforderlich, dass die jeweils eingesetzten Zerstäubersysteme Sprayeigenschaften liefern, welche den gestellten Anforderungen in optimaler Weise gerecht werden, [1].

Problematisch ist, dass oftmals in realen verfahrenstechnischen Prozessen Flüssigkeiten zu zerstäuben sind, deren rheologische Eigenschaften sich von Wasser deutlich unterscheiden. Zudem sind derartige Fluide häufig entweder kostspielig, toxisch oder bilden eine explosive Atmosphäre. Sind ferner dann noch große Volumenströme zu zerstäuben, lassen sich Optimierungsmaßnahmen im Labor- oder Technikumsmaßstab in der Regel nicht mehr praktikabel durchführen.

Hier bieten sich dimensionsanalytische und ähnlichkeitstheoretische Methoden an, um mit einem relativ geringen Aufwand zu den gewünschten Ergebnissen zu gelangen.

2. Grundlagen dimensionsanalytischer Methoden

Die Wechselwirkung physikalischer Größen lässt sich ohne genaue Kenntnis der exakten formalen Gesetzmäßigkeiten erfassen, [2]. Das betrifft explizit nicht nur Fragestellungen aus dem Bereich der Düsen- und Zerstäubungstechnik. Die Dimensionsanalytik stellt ein leistungsfähiges Instrument dar, welches in nahezu allen Bereichen der Verfahrenstechnik anzuwenden ist.

¹ Dipl.-Ing. Thomas Richter
Geschäftsführer der IBR Zerstäubungstechnik GmbH
Freier Sachverständiger für Zerstäubungs- und Düsentechnik, BDSF®

Bereits in einem ersten Schritt liefert eine Dimensionsanalyse wertvolle Erkenntnisse in Bezug auf bestehende Proportionalitäten. Darüber hinaus ergeben sich rasch Rechenvorschriften, welche für das Konzipieren nachfolgender Modellversuche von erforderlich sind.

Dieses bedeutet, dass bereits im Vorfeld zu experimentellen Studien unbedingt eine dimensionsanalytische Betrachtung des Prozesses durchgeführt werden sollte. Nur dann ist es möglich, Modellversuche so zu gestalten, dass bereits mit minimalem experimentellen Aufwand ein reproduzierbares und übertragbares Ergebnis erzielt werden kann.

Die aus der Dimensionsanalytik hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten bieten somit einen enormen Vorteil. So sind in den experimentellen Studien nicht mehr alle relevanten Einflussgrößen einzeln zu variieren, sondern lediglich die Beträge der ermittelten dimensionslosen Kennzahlen.

Hierzu ein einfaches Beispiel. Geht man davon aus, dass eine beliebige physikalische Größe (a) von insgesamt vier verschiedenen physikalischen Einflussgrößen (b bis e) abhängt, so kann man den folgenden Zusammenhang angeben,

$$a = f(b, c, d, e) . \quad (1)$$

Variiert man nun im Experiment die Größen b bis e einzeln in jeweils 10 Schritten und beobachtet die Änderungen der Größe a, sind insgesamt 40 Messungen erforderlich. Eine vorab durchgeführte Dimensionsanalyse hätte in diesem Fall vermutlich lediglich zwei dimensionslose Kennzahlen, auch Π -Größen genannt, ergeben. Hieraus resultiert für die identische Fragestellung dann der dimensionslose Zusammenhang,

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) . \quad (2)$$

Es wird deutlich, dass in diesem Fall somit lediglich 10 Variationen und demzufolge auch nur 10 experimentelle Untersuchungen erforderlich sind. Es kommt jedoch noch ein zusätzlicher und wesentlicher Effekt hinzu.

Bei der ersten Vorgehensweise erhält man relativ viele einzelne Datensätze. Bereits bei dem gewählten trivialen Beispiel fällt es schwer, einen schlüssigen Zusammenhang zwischen den einzelnen Einflussgrößen herzustellen. Anders stellt sich die Situation für das betrachtete Beispiel dar, wenn die dimensionslosen Kennzahlen Π_1 und Π_2 verwendet werden. Der zu analysierende Prozess lässt sich entweder mathematisch anhand der experimentell gewonnenen Daten in der Form

$$\Pi_1 = \text{const} \cdot \Pi_2^i \quad (3)$$

oder alternativ als Diagramm darstellen. Ein typisches Beispiel für eine derartige Darstellung ist das aus der Literatur [3] hinlänglich bekannte Widerstandsgesetz für das Umströmen von Kugeln, Abbildung 1. Die fluiddynamische Widerstandskraft F_W als übliche Zielgröße ist in der als dimensionsloser Widerstandsbeiwert bekannten Kennzahl c_W enthalten.

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A} \quad (4)$$

Der Betrag des Widerstandsbeiwertes ist eine Funktion der Reynoldszahl,

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} \quad (5)$$

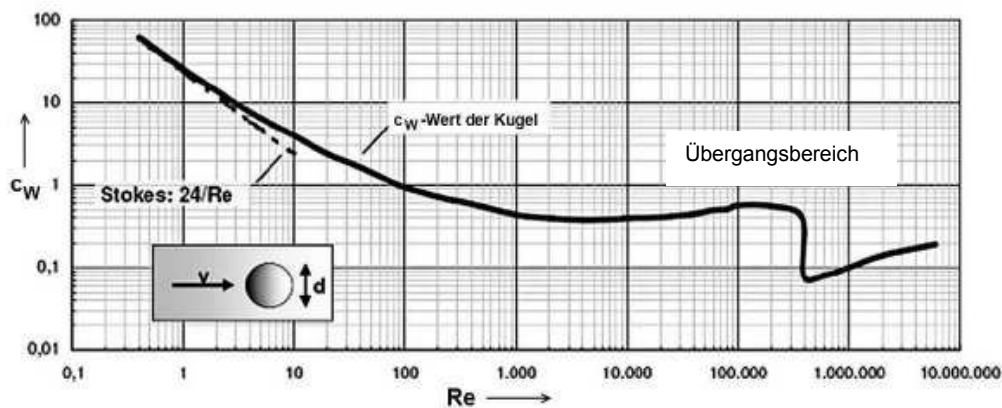


Abbildung 1: c_W -Wert einer umströmten Kugel als Funktion der Reynoldszahl Re

3. Herleiten eines vollständigen Satzes dimensionsloser Kennzahlen

Es stehen verschiedene methodische Vorgehensweisen zur Verfügung, um die beschreibenden dimensionslosen Π -Größen herzuleiten, [4]. Dimensionshomogene algebraische Größengleichungen lassen sich derart umformen, dass physikalische Gruppen dimensionsloser Kennzahlen entstehen.

Des Weiteren können die Kennzahlen auch aus bekannten Differenzialgleichungen generiert werden. Dieses setzt allerdings voraus, dass die relevanten Randbedingungen bekannt sind.

Diese Methoden weisen jedoch einen gravierenden Nachteil auf. Die zu untersuchenden Sachverhalte müssen bereits soweit bekannt sein, dass sich fundamentale Zusammenhänge mathematisch formulieren lassen. Eine Vielzahl ingenieurwissenschaftlicher Anwendungen zeichnet sich jedoch durch komplexe und wechselwirkende Zusammenhänge aus. Aus diesem Grund ist es oftmals nicht möglich, die erforderlichen algebraischen oder differenziellen Zusammenhänge nebst Randbedingungen zu definieren.

Eine in der verfahrenstechnischen Anwendung häufig genutzte und bewährte alternative Methode besteht darin, die gesuchten Π -Größen aus einer Relevanzliste herzuleiten. Die den zu analysierenden Prozess beeinflussenden relevanten Einflussgrößen sowie die Zielgröße werden hierzu in einem ersten Schritt tabellarisch in dieser erfasst.

Hierbei ist unbedingt darauf zu achten, dass die den jeweiligen physikalischen Größen zugeordneten Einheiten kohärent im Sinne des SI-Systems nach der ISO 1000 sind. Die zugehörigen dimensionslosen Kennzahlen resultieren aus mathematischen Berechnungen nach dem Prinzip des sogenannten Buckingham'schen Π -Theorems, [5].

4. Ähnlichkeitstheoretische Betrachtung des Zerstäubungsprozesses am Beispiel eines Rotationszerstäubers

Das Ergebnis eines zerstäubungstechnischen Prozesses ist in der Regel ein Spray, welches spezifische Eigenschaften aufweist. Hierzu zählen sowohl die vollständigen Tropfengrößenverteilungen als auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Tropfen. Dieses Spray selbst steht wiederum in Interaktion mit einem bestimmten verfahrenstechnischen Prozess. Hierbei kann es sich beispielsweise um einen Prozess der Sprühtrocknung handeln.

Zur Lösung dieser Aufgabe werden oftmals Rotationszerstäuber eingesetzt. Diese weisen den Vorteil auf, dass sie einerseits unter bestimmten Betriebsbedingungen im Bereich des sogenannten Fadenzerfalls ein nahezu monodisperses Spray liefern, andererseits nahezu verstopfungsunempfindlich sind. Eine schematische Darstellung eines derartigen Rotationszerstäubers ist der Abbildung 2 zu entnehmen.

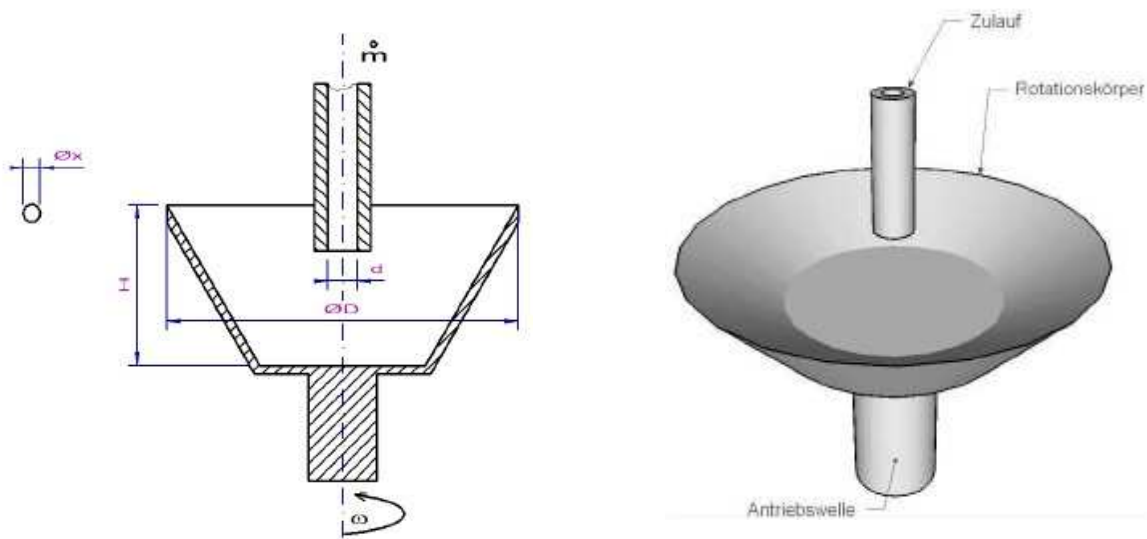


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Rotationszerstäubers

Die zu zerstäubende Flüssigkeit mit dem Massenstrom \dot{m} speist mit geringer Strömungsgeschwindigkeit den Rotationszerstäuber über den Zulauf. Dieser rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Infolge der Zentrifugalbeschleunigung strömt die Flüssigkeit zum Rand des Rotationskörpers und zerfällt im Bereich des Fadenzerfalls [6] in nahezu gleichgroße Tropfen mit dem Durchmesser x . Dieser Tropfendurchmesser

dient gleichzeitig als Zielgröße für die Ähnlichkeitstheoretische Betrachtung. Somit ergibt sich die in Tabelle 1 dargestellte Relevanzliste.

Vorausgesetzt ist hierbei ferner, dass es sich um ein newtonsches Fluid handelt. Zudem soll der Schlupf der Flüssigkeit auf dem Rotationszerstäuber vernachlässigbar klein sein. Die zu zerstäubende Flüssigkeit ist zudem gegenüber dem Werkstoff des Rotationszerstäubers benetzend; eine unerwünschte Rinnsaalbildung ist somit auszuschließen.

Die Tropfenbildung soll im Nahbereich der Abströmkante des Rotationszerstäubers erfolgen. Somit sind Verdampfungseffekte infolge thermodynamischer Wechselwirkungen mit der umgebenden Atmosphäre in der Relevanzliste nicht berücksichtigt.

Sofern gewünscht, können selbstverständlich derartige Phänomene in einer weiterführenden dimensionsanalytischen Betrachtung untersucht werden. Der als Zielgröße fungierende Tropfendurchmesser x sowie die aus dem Durchmesser D und der Winkelgeschwindigkeit ω resultierende Geschwindigkeit des Tropfens dienen dann als neue Einflussgrößen für die weiterführende Analyse.

	Bezeichnung	Formelzeichen	Einheit
Zielgröße:	Tropfendurchmesser	x	m
Geometriegrößen:	Durchmesser Rotationszerstäuber	D	m
	Höhe	H	m
	Durchmesser Zulauf	d	m
Stoffgrößen:	Dynamische Viskosität	η	kg/ms
	Dichte Flüssigkeit	ρ	kg/m ³
	Dichte Gas	ρ_G	kg/m ³
	Oberflächenspannung	σ	kg/s ²
Betriebsgrößen:	Massenstrom	\dot{m}	kg/s
	Winkelgeschwindigkeit	ω	1/s

Tabelle 1: Relevanzliste für den gesuchten Tropfendurchmesser x an dem Rotationszerstäuber

Aus dieser Relevanzliste resultiert der folgende Zusammenhang,

$$x = f(D, H, d, \eta, \rho, \rho_G, \sigma, \dot{m}, \omega) . \quad (6)$$

Hieraus resultiert *eine mögliche Darstellung* der Dimensionsmatrix. Die Reihenfolge der jeweiligen Einflussgrößen ist hierbei willkürlich gewählt. Es empfiehlt sich jedoch, die gesuchte Zielgröße in der letzten Spalte anzugeben. Dieses hat zur Folge, dass die Zielgröße in nur einer dimensionslosen Kennzahl erscheint.

	\dot{m}	η	ω	d	H	D	ρ	ρ_G	σ	x
m	0	-1	0	1	1	1	-3	-3	0	1
kg	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
s	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	-2	0

(7)

Diese Dimensionsmatrix wird nun in eine Einheitsmatrix und eine Restmatrix überführt. Dieses führt zur folgenden Darstellung.

	\dot{m}	η	ω	d	H	D	ρ	ρ_G	σ	x
m	1	0	0	1	1	1	-2	-2	1	1
kg	0	1	0	-1	-1	-1	3	3	0	-1
s	0	0	1	0	0	0	-1	-1	1	0

(8)

Zum Erstellen der dimensionslosen Kennzahlen kommt nun die formale Rechenvorschrift

$$\Pi_j = \frac{\bar{x}_j}{\prod_{i=1}^r \bar{x}_i^{P_{ij}}} \quad \text{mit } j=1 \div m \quad (9)$$

zur Anwendung. Die das erörterte Problem beschreibenden dimensionslosen Kennzahlen lauten somit:

$$\Pi_1 = \frac{d \cdot \eta}{\dot{m}} \quad (10)$$

$$\Pi_2 = \frac{H \cdot \eta}{\dot{m}} \quad (11)$$

$$\Pi_3 = \frac{D \cdot \eta}{\dot{m}} \quad (12)$$

$$\Pi_4 = \frac{\rho \cdot \dot{m}^2 \cdot \omega}{\eta^3} \quad (13)$$

$$\Pi_5 = \frac{\rho_G \cdot \dot{m}^2 \cdot \omega}{\eta^3} \quad (14)$$

$$\Pi_5 = \frac{\sigma}{\dot{m} \cdot \omega} \quad (15)$$

$$\Pi_6 = \frac{x \cdot \eta}{\dot{m}} \quad (16)$$

Diese sieben dimensionslosen Kennzahlen beschreiben vollständig das zu analysierende Problem. Im Interesse einer möglichst effizienten Durchführung der notwendigen experimentellen Studien sowie der Transparenz der Ergebnisse ist es jedoch ratsam, eine Kombination der Kennzahlen miteinander durchzuführen.

Dieses führt dann zu einem äquivalenten Kennzahlensatz der Form

$$\frac{x}{D} = f \left(\frac{H}{D}, \frac{d}{D}, \frac{\eta^2}{\sigma \cdot \rho \cdot D}, \frac{\omega \cdot \rho \cdot D^2}{\eta}, \frac{\dot{m}}{D \cdot \eta}, \frac{\sigma}{\dot{m} \cdot \omega}, \frac{\rho}{\rho_G} \right). \quad (17)$$

Eine wichtige Voraussetzung zur reproduzierbaren Durchführung von Modellversuchen ist, dass zwischen dem Modell und der Hauptausführung eine vollständige geometrische Ähnlichkeit besteht. So liegt es nahe, dass experimentelle Untersuchungen an dem in Abbildung 1 gezeigten Rotationszerstäuber zu anderen Ergebnissen führen werden als an einer einfachen ebenen und rotierenden Scheibe.

Die Beträge der dimensionslosen Kennzahlen, welche die Geometrieconfiguration beschreiben, müssen demzufolge identisch sein. Für das Beispiel bedeutet dieses,

$$\left[\frac{H}{D} \right]_M = \left[\frac{H}{D} \right]_H, \quad (18)$$

$$\left[\frac{d}{D} \right]_M = \left[\frac{d}{D} \right]_H \quad (19)$$

Der in Gleichung 16 dargestellte Zusammenhang lässt sich somit auf die folgende Proportionalität reduzieren,

$$\frac{x}{D} \sim f \left(\frac{\eta^2}{\sigma \cdot \rho \cdot D}, \frac{\omega \cdot \rho \cdot D^2}{\eta}, \frac{\dot{m}}{D \cdot \eta}, \frac{\sigma}{\dot{m} \cdot \omega}, \frac{\rho}{\rho_G} \right) \quad (20)$$

In einem nachfolgenden Schritt sind nun die erforderlichen experimentellen Untersuchungen unter Berücksichtigung der geometrischen Ähnlichkeit zu konzipieren.

5. Modellversuche bei vollständiger Ähnlichkeit; Scale-up bzw. Scale-down

Das Herleiten eines reproduzierbaren mathematischen Sachverhaltes im Interesse eines Scale-up beziehungsweise Scale-down Vorganges setzt voraus, dass sämtliche in der Gleichung 19 genannten dimensionslosen Kennzahlen sowohl für die Modell- als auch für Hauptausführung den identischen Betrag aufweisen. Nur dann ist sichergestellt, dass eine vollständige Ähnlichkeit und Übertragbarkeit gewährleistet ist.

Der Durchmesser des Modells soll beispielsweise um den Maßstabsfaktor $m = 10$ kleiner sein als der Durchmesser der geplanten Hauptausführung. Dieses bedeutet:

$$D_M = 0,1 \cdot D_H \quad (21)$$

$$\frac{H_H}{D_H} = \frac{H_M}{D_M} \Rightarrow H_M = 0,1 \cdot H_H \quad (22)$$

$$\frac{d_H}{D_H} = \frac{d_M}{D_M} \Rightarrow d_M = 0,1 \cdot d_H \quad (23)$$

Diese grundlegende Betrachtung zur erforderlichen geometrischen Ausgestaltung des Modells ist trivial.

Etwas komplizierter ist die Wahl der rheologischen Daten für die Modellversuche. Aus Gründen einer möglichst einfachen Modellübertragung wird zunächst definiert, dass die Dichte ρ und die Oberflächenspannung σ des zu zerstäubenden Fluides für die Hauptausführung als auch für das Modell identisch sein sollen.

Somit gilt:

$$\rho_H = \rho_M ; \sigma_H = \sigma_M \quad (24)$$

In einem nachfolgenden Schritt ist nun die Flüssigkeitsviskosität für die Modellversuche zu bestimmen. Diese ist in der in Gleichung 20 dargestellten Proportionalität in einer einzigen dimensionslosen Kennzahl vorhanden.

$$\frac{\eta_H^2}{\sigma_H \cdot \rho_H \cdot D_H} = \frac{\eta_M^2}{\sigma_M \cdot \rho_M \cdot D_M} \Rightarrow \eta_M = 0,316 \cdot \eta_H \quad (25)$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass das Fluid für die Modellversuche eine geringere Viskosität aufweisen muss als das Originalfluid. Sofern dieses relativ hoch viskos ist, lässt sich die Forderung sicherlich gut erfüllen. Problematischer ist es, wenn das Originalfluid bereits sehr nieder viskos ist. In einem solchen Fall ist es dann schwierig, eine geeignete Modellflüssigkeit zu finden.

Dann ist entweder der Maßstabsfaktor entsprechend anzupassen oder eine Änderung der Fluidichte und der Oberflächenspannung für das Modellfluid in Betracht zu ziehen. Lassen sich auch durch diese Parametervariationen keine geeigneten Modellfluide finden, muss zwangsläufig auf die sogenannte partielle Ähnlichkeit zurückgegriffen werden. Dieses bedeutet, dass nicht alle dimensionslosen Kennzahlen zwischen dem Modell und der Hauptausführung betragsmäßig identisch sind.

Bei der partiellen Ähnlichkeit ist eine gewisse Erfahrung erforderlich, um die Auswirkungen auf Scale-up oder Scale-down Vorgänge abschätzen zu können.

In einer analogen Vorgehensweise wird die Winkelgeschwindigkeit ω_M berechnet.

$$\frac{\omega_H \cdot \rho_H \cdot D_H}{\eta_H} = \frac{\omega_M \cdot \rho_M \cdot D_M}{\eta_M} \Rightarrow \omega_M = 31,6 \cdot \omega_H \quad (26)$$

Anhand der zugrunde liegenden Randbedingungen ist auch hier zu prüfen, ob der im Modellmaßstab vorliegende Rotationszerstäuber technisch mit der geforderten Winkelgeschwindigkeit (Drehzahl) betrieben werden kann. Gegebenenfalls ist auch hier der Modellmaßstab entsprechend zu ändern.

Maßgeblich für Modellversuche sind in erster Linie immer die zu handhabenden Volumen- beziehungsweise Massenströme. Der Massenstrom an Flüssigkeit für die Modellausführung beträgt

$$\frac{\dot{m}_H}{D_H \cdot \eta_H} = \frac{\dot{m}_M}{D_M \cdot \eta_M} \Rightarrow \dot{m}_M = 0,0316 \cdot \dot{m}_H \quad (27)$$

Es ist also ein erheblich geringerer Massenstrom im Vergleich zur Hauptausführung erforderlich! Die Modellversuche können demzufolge mit einem deutlich geringeren apparativen Aufwand unter Berücksichtigung der vollständigen Ähnlichkeit betrieben werden.

Dieses wiederum bedeutet, dass mit einem verhältnismäßig geringen Aufwand die Optimierung des Prozesses und das Ermitteln von Regelkurven, -beispielsweise zur Anlagensteuerung-, durchgeführt werden können.

Zu prüfen ist im Rahmen der Modellversuche zudem, ob der Flüssigkeitszerfall zu Tropfen im Bereich des Fadenzerfalls stattfindet. Ist dieses nicht der Fall, so sind Anpassungen des Massenstroms oder der Winkelgeschwindigkeit vorzunehmen. Diese Daten dienen selbstverständlich ebenfalls der reproduzierbaren Ausgestaltung der realen Hauptausführung.

6. Zusammenfassung

Komplexe zerstäubungstechnische Vorgänge sowie nachfolgende verfahrenstechnische Prozesse lassen sich mittels dimensionsanalytischer Methoden und Ähnlichkeitstheoretischer experimenteller Studien effizient und kostengünstig auslegen, den Anforderungen anpassen und optimieren. Dieses betrifft selbstverständlich nicht nur die im Beispiel genannte Zerstäubung durch Rotationszerstäuber, sondern gilt ebenfalls beispielsweise für Einstoff-Druckdüsen oder pneumatische Zerstäuber und deren Integration in die verfahrenstechnische Anwendung.

Voraussetzung hierfür ist grundsätzlich, dass die jeweilige Aufgabenstellung, wie im Beispiel dargestellt, systematisch analysiert wird. Bereits bei der Berechnung der relevanten Parameter für modelltechnische Studien unter Berücksichtigung der vollständigen oder partiellen Ähnlichkeit ergeben sich hilfreiche Hinweise zu bestehenden Proportionalitäten. Dieses bedeutet, dass bereits im Vorfeld zu Experimenten eruiert werden kann, welche Einflussgrößen maßgeblich und welche lediglich von untergeordneter Bedeutung sind.

Hieraus resultiert für systematische Optimierungsmaßnahmen ein enormer Vorteil!

Das Erstellen verschiedener vollständiger Sätze dimensionsloser Kennzahlen für in Wechselwirkung miteinander stehende verfahrenstechnische Teilprozesse erleichtert wesentlich das grundlegende Verständnis komplexer Zusammenhänge. Modellversuche unter dem Aspekt der vollständigen beziehungsweise partiellen Ähnlichkeit führen rasch und mit einem verhältnismäßig geringen Aufwand zu reproduzierbaren und auf die Hauptausführung übertragbaren Ergebnissen.

Das Aufnehmen von Kurven und das Erstellen von Berechnungsvorschriften ist für eine intelligente Anlagensteuerung, welche auf wechselnde Betriebsparameter flexibel reagieren kann, unabdingbar.

7. Formelzeichen, Indizes

A	Fläche	[m ²]
D	Durchmesser	[m]
d	Durchmesser	[m]
F	Kraft	[N]
H	Höhe	[m]
m	Maßstabsfaktor	[-]
\dot{m}	Massenstrom	[kg/s]
x	Tropfendurchmesser	[m]
\bar{x}	Einflussgröße	
Π	Dimensionslose Kennzahl	[-]
η	Dynamische Viskosität	[Pa s]
ρ	Dichte	[kg/m ³]
σ	Oberflächenspannung	[N/m]
ω	Winkelgeschwindigkeit	[1/s]

Indizes

G	Gas
H	Hauptausführung
i,j	Zeile, Spalte, Exponent
M	Modellausführung
w	Widerstand

8. Literatur

- |1| Richter T.: Zerstäuben von Flüssigkeiten, Düsen und Zerstäuber in Theorie und Praxis. expert Verlag, 2008, ISBN-13: 978-3-8169-2815-7
- |2| Richter T, Röhrig A.: Analyse technisch-physikalischer Zusammenhänge; chemie-anlagen+verfahren, Jan. 90, S. 53-54
- |3| Oertel H., Böhle M., Dohrmann U.: Strömungsmechanik. Grundlagen – Grundgleichungen, Lösungsmethoden, Verlag Vieweg+Teubner, 2008, ISBN-13: 978-3-8348-04839
- |4| Szirtes T., Rózsa P.: Applied dimensional analysis and modeling, Verlag Butterworth-Heinemann, 2007, ISBN-13: 978-0-12-370620-1
- |5| Buckingham E.: On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. Phys. Rev. 4, 345-376, 1914
- |6| Wozniak G.: Zerstäubungstechnik, Prinzipien, Verfahren, Geräte, Verlag Springer, 2002, ISBN-13: 978-3540411703