Lagerreaktionen können nur mit Hilfe der Elastizitätstheorie bestimmt werden.

Technische Mechanik II Elastostatik werden ein- und mehrfach "statisch unbestimmt" gelagerte Tragwerke vorgestellt.

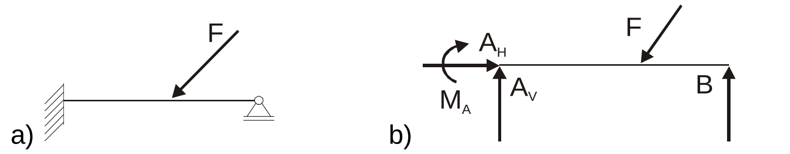


Bild 5.17 Einfach statisch unbestimmtes System; a) Systemskizze; b) Schnittbild

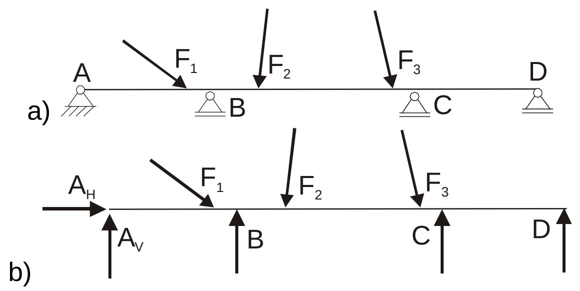


Bild 5.18 Zweifach statisch unbestimmtes System; a) Systemskizze; b) Schnittbild

5.6 Lösen eines Berechnungsproblems

- Formulierung
- mechanisches Ersatzmodell (Eigenschaften)
- Lösung des Ersatzmodells
- Diskussion, Bedeutung

Hier wird das Hauptaugenmerk auf "Lösung des Ersatzmodells" und "Diskussion, Bedeutung" bearbeitet

- Schnittbild zum Sichtbarmachen der Kräfte,
- Aufstellen und Lösen der Gleichungen,
- Kontrolle des Ergebnisses auf Richtigkeit und Genauigkeit.

?

Aufgabe 5.1

- Bestimmung der Lagerkräfte durch Schneiden an den Lagern
- es handelt sich links um ein einwertiges Lager und rechts um ein zweiwertiges Lager
- Belastung durch Einzelkräfte und Einzelmoment
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Ein Träger wird mit den Kräften F_1, F_2, F_3 und einem Moment M_B belastet (Bild 5.19).

gegeben: $\alpha = 45^0$, F_1, F_2, F_3, M_B, a

gesucht: Bestimmung der Auflagerkräfte A und B

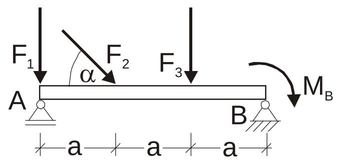


Bild 5.19 Träger mit den Kräften F_1, F_2, F_3 und dem Moment M_B

Lösung: $B_H = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B_V = \frac{1}{3\,a}$ $(F_2\ a \sin\alpha + F_3\ 2a + M_B)$,

$A = \frac{1}{3\,a}$ $(F_2\ 2\ a \sin\alpha + F_3\ a + F_1\ 3\ a - M_B)$

Aufgabe 5.2

- Bestimmung der Lagerkräfte durch Schneiden an den Lagern
- es handelt sich um drei einwertige Lager in verschiedenen Richtungen
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Ein Träger wird mit der Kraft F_1 und dem Kräftepaar $F_2 * h$ belastet (Bild 5.21). In C hat der Träger ein schräg gestelltes, einwertiges Lager.

gegeben: F_1, F_2, a, h, α

gesucht: Bestimmung der Auflagerkräfte A, B und C

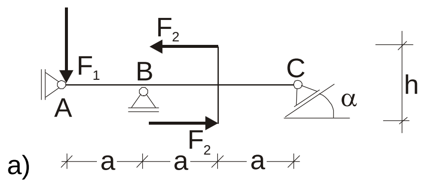


Bild 5.21 a) Träger mit der Kraft F_1 und dem Kräftepaar $F_2 * h$

Lösung: $A = \frac{-F_1 a - F_2 h}{2a} \tan\alpha$, $B = \frac{1}{2\,a}$ $(F_2\ h + F_1\ 3\ a)$ (5.31), $C = \frac{-F_1 a - F_2 h}{2a \cos\alpha}$

Aufgabe 5.3

- Bestimmung der Lagerkräfte durch Schneiden an den Lagern
- es handelt sich links um ein zweiwertiges Lager und rechts um ein einwertiges Lager
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Ein Träger wird mit den Kräften F_1, F_2 und F_3 belastet (Bild 5.20).

gegeben: $\alpha = 30^0$, F_1, F_2, F_3, a

gesucht: Bestimmung der Auflagerkräfte A und B

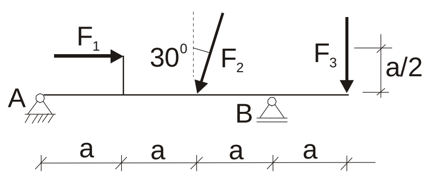


Bild 5.23 Träger mit den Kräften F_1, F_2 und F_3

Lösung: $A_V = \frac{1}{3}\,(-\,\frac{1}{2}\,F_1 + F_2 \cos\alpha - F_3\square), A_H = -\,F_1 + F_2 \sin\alpha,\ B = \frac{1}{3}\,(\frac{1}{2}\,F_1 + 2\,F_2 \cos\alpha + 4\,F_3)$

? **Aufgabe 5.4**

- Bestimmung der Lager- und Seilkräfte durch Schneiden an den Lagern
- Es handelt sich um ein zweiwertiges Lager und durch die Seilkraft jeweils um ein einwertiges Lager
- Seilkraft über Umlenkrollen
- Scheibengewicht G im Schwerpunkt
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Eine dreieckige, schwere Scheibe (Gewicht G) wird in A durch ein zweiwertiges Lager und in B und C durch ein Seil S gehalten. Das Seil wird durch zwei Umlenkrollen geführt. Das Scheibengewicht G greift im Schwerpunkt S_{Sch} der Scheibe an (Bild 5.25).

gegeben: Scheibengewicht G, a, h

gesucht: Bestimmung der Auflagerkraft A und der Seilkraft S

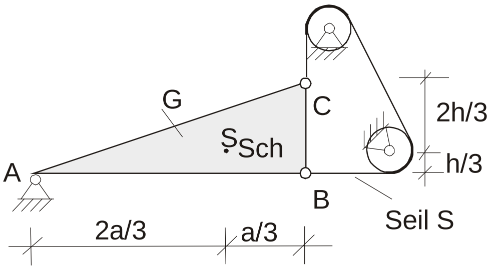


Bild 5.25 Dreieckige, schwere Scheibe

Lösung: $S = G\,\frac{2}{3}$, $A_H = -\,G\,\frac{2}{3}$, $A_V = G\,\frac{1}{3}$

? **Aufgabe 5.5**

- Bestimmung der Lager- und Seilkräfte durch Schneiden an den Lagern
- Es handelt sich links um ein zweiwertiges Lager und rechts einwertiges um ein Lager
- Krafteinleitung über Hebel
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Ein Träger wird mit der Kraft F am Hebel der Länge c belastet (Bild 5.27).

gegeben: F, a, b, c

gesucht: Bestimmung der Auflagerkräfte A und B

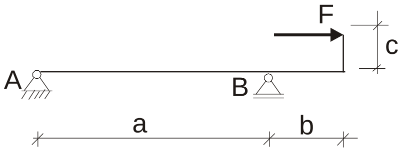


Bild 5.27 Träger mit der Kraft F am Hebel

Lösung: $A_H = - F$, $A_V = - F \dfrac{c}{a}$, $B = F \dfrac{c}{a}$

Aufgabe 5.6

- Bestimmung der Lager- und Seilkräfte durch Schneiden an den Lagern
- Es handelt sich links um ein zweiwertiges Lager und rechts um ein einwertiges Lager
- Kräfte an einem ebenen System
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Eine Scheibe wird mit den Kräften F_1, F_2, F_3 und F_4 belastet (Bild 5.29).

gegeben: α_1, α_3, F_1, F_2, F_3, F_4, a, h

gesucht: Bestimmung der Auflagerkräfte A und B

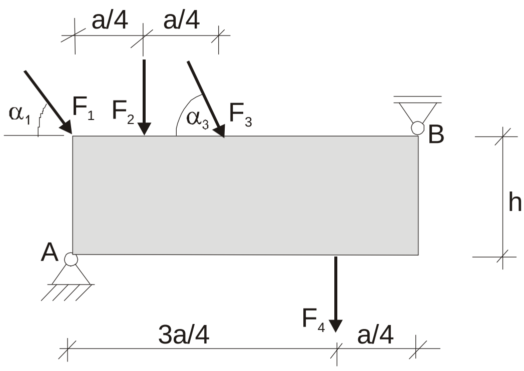


Bild 5.29 Scheibe mit den Kräften F_1, F_2, F_3 und F_4

Lösung: $A_V = \left(\dfrac{1}{4}F_4 + (-F_1\cos\alpha_1 - F_3\cos\alpha_3)\dfrac{h}{a} + F_1\sin\alpha_1 + \dfrac{3}{4}F_2 + \dfrac{1}{2}F_3\sin\alpha_3\right)$,

$A_H = -F_1\cos\alpha_1 - F_3\cos\alpha_3$, $B = \left(-F_1\cos\alpha_1\dfrac{h}{a} - \dfrac{1}{4}F_2 - \dfrac{1}{2}F_3\sin\alpha_3 - F_3\cos\alpha_3\dfrac{h}{a} - \dfrac{3}{4}F_4\right)$

Aufgabe 5.7

- Bestimmung der Lager- und Seilkräfte durch Schneiden an den Lagern
- Es handelt sich um zwei Pendelstützen, die jeweils einem einwertigen Lager entsprechen, da in die Stützen nur eine Axhsiale Kraft eingeleitet werden kann, und rechts um ein einwertiges Lager.
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerkräfte

Ein Träger wird mit der Kraft F in zwei Punkten belastet (Bild 5.31). In A besteht das Lager aus zwei Pendelstützen, in B aus einem einwertigen Lager.

gegeben: F, a

gesucht: Bestimmung der Auflagerkraft B und der Stabkräfte S_1, S_2

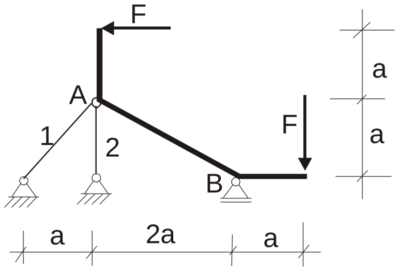


Bild 5.31 Träger mit der Kraft F

Lösung: $S_1 = \sqrt{2}\ F$, $B = F$, $S_2 = -F$

?

Aufgabe 5.8

- Bestimmung der Lager- und Gelenkkräfte durch Schneiden an den Lagern und Gelenken
- Es handelt sich in A und B um jeweils ein zweiwertiges Lager und und ein Gelenk in C
- Belastung des Systems über die Seilkraft an einer Rolle auf dem System
- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an Teilsystemen zur Bestimmung der Lager- und Gelenkkräfte

Ein aus Balken und einer Rolle zusammengesetztes System wird über ein Seil mit dem Gewicht F belastet (Bild 5.33).

gegeben: F, a

gesucht: Bestimmung der Auflagerkraft A und B und der Gelenkkraft C.

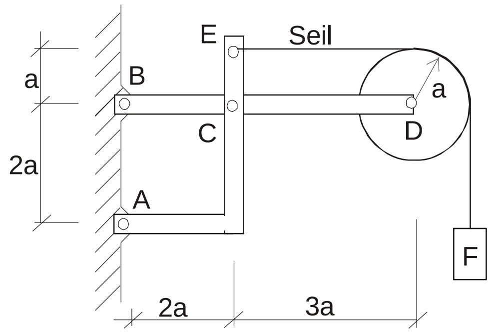


Bild 5.33 Zusammengesetztes System

Lösung: A = 3,91 F, B = 3,35 F, C = 4,72 F

6 Ebenes Fachwerk

Lehrziel des Kapitels

- Definition eines Fachwerks
- Statische Bestimmheit eines Fachwerks
- Aufbau eines Fachwerks
- Analytische und graphische Lösungsmethoden (CREMONAplan, knotenweises Schneiden, RITTERscher Schnitt)

f(x) = ω

- **Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten**

$\rightarrow: \quad \Sigma F_x = 0, \qquad (6.1)$

$\uparrow: \quad \Sigma F_y = 0. \qquad (6.2)$

Ein Fachwerk besteht aus einer Anzahl einzelner Stäbe, die zusammen wie ein Tragwerk wirken. Wegen einiger wesentlicher Einschränkungen werden Fachwerke gesondert betrachtet.

6.1 Definition eines Fachwerks

- Die Stäbe sind gerade,
- die Stäbe sind an den Verbindungspunkten, den Knoten, gelenkig angeschlossen,
- die Stäbe sind an den Knoten zentrisch angeschlossen.
- Die Lasten greifen nur an den Knoten an.
- Daher werden die Stäbe nur in Normalenrichtung (in der Achse) auf Druck und Zug belastet.

In Bild 6.1 wird die Vorzeichendefinition der Fachwerkstäbe angegeben. Die Stabkraft wird immer als Zugkraft, das heißt vom Knoten ziehend, mit positivem Vorzeichen angesetzt. Wenn sich das Vorzeichen in der Rechnung als negativ erweist, handelt es sich um einen Druckstab.

In der Praxis muss für Druckstäbe noch ein Stabilitätsnachweis, zum Beispiel mit Hilfe des ω- Verfahren[6.1], durchgeführt werden. Dies würde hier zu weit führen. Es wird in diesem Buch nicht weiter darauf eingegangen.

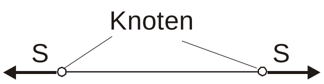


Bild 6.1 Vorzeichenfestlegung

Wie alle Tragwerke werden auch Fachwerke durch die Auflager mit ihrer Umgebung verbunden. Auch hier muß jeweils kontrolliert werden, ob das System statisch bestimmt ist. Dabei muß unterschieden werden, ob das Fachwerk äußerlich statisch bestimmt und/ oder innerlich statisch bestimmt ist.

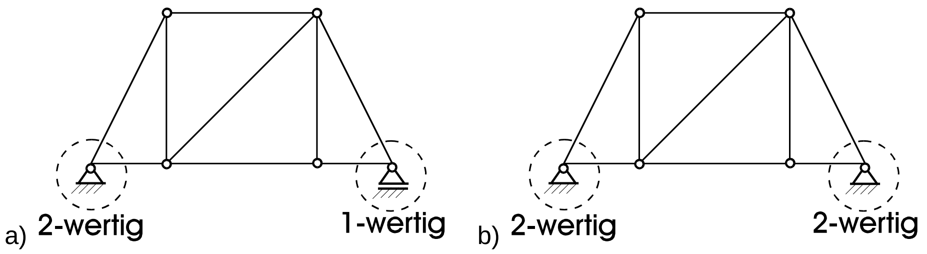


Bild 6.2 Fachwerk; a) innerlich und äußerlich statisch bestimmt; b) äußerlich statisch unbestimmt

[6.1] W. Beitz und K.- H. Grote (Hers.), Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 20. Auflage, Springer-Verlag, 2001

Für ein innerlich und äußerlich statisch bestimmtes Fachwerk reichen die 3 Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem und die Gleichungen an den Teilsystemen aus, um alle Auflagerkräfte und alle Stabkräfte zu bestimmen.

Für ein innerlich statisch bestimmtes und äußerlich statisch unbestimmtes Fachwerk reichen die 3 Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem nicht aus, um alle Auflagerkräfte zu bestimmen. Hier muss die Elastizitätstheorie mitberücksichtigt werden (siehe Technische Mechanik II Elastostatik[5.2]).

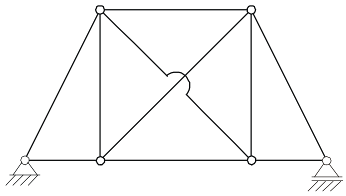


Bild 6.3 Innerlich statisch unbestimmtes Fachwerk

Für ein innerlich statisch unbestimmtes und äußerlich statisch bestimmtes Fachwerk reichen die drei Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem aus, um alle Auflagerkräfte zu bestimmen. Die Gleichungen an den Teilsystemen reichen nicht aus, um alle Stabkräfte zu bestimmen. Jetzt muss hier die Elastizitätstheorie mitberücksichtigt werden (siehe Technische Mechanik II Elastostatik).

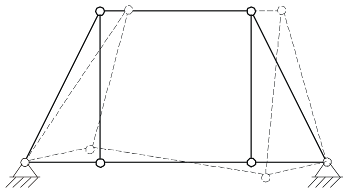


Bild 6.4 Kinematisches Fachwerk

Nicht erlaubt sind kinematische, also bewegliche Systeme (Bild 6.4). Dieses Fachwerk ist durch die fehlende Querverstrebung in horizontaler Richtung beweglich.

Im allgemeinen läßt sich die statische Bestimmtheit eines Fachwerks mit Hilfe der Bildungsgesetze (siehe Kapitel 6.2) bestimmen.

Dies ist aber nicht immer möglich. Dann müssen die Fachwerke mit anderen Methoden, zum Beispiel mit Hilfe eines Polplans aus der Getriebeanalyse[6.1], auf ihre statische Bestimmtheit untersucht werden.

6.2 Aufbau eines Fachwerks

In der Definition des Fachwerks wird schon gesagt, daß das Fachwerk aus einzelnen, geraden Stäben besteht, die in den Knoten zentrisch miteinander verbunden sind. Alle Lasten greifen nur an diesen Knoten an.

Um das System zu ordnen, werden die Knoten mit römischen Zahlen, die Stäbe mit arabische Zahlen gekennzeichnet.

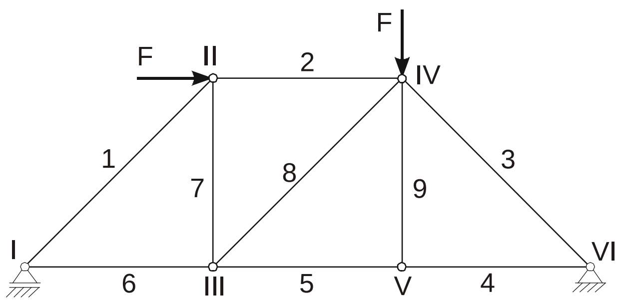


Bild 6.5 Nummerierung der Knoten und Stäbe

[5.2] Kunow, Vorlesungsskript zur Technischen Mechanik II Elastostatik

[6.1] W. Beitz und K.- H. Grote (Hers.), Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 20. Auflage, Springer-Verlag, 2001

Ein Schnittbild, wie wir es gewohnt sind, würde nun sehr umfangreich werden (Bild 6.6 a). Deshalb werden die Knoten nicht alle auf einmal, sondern ein Knoten nach dem anderen geschnitten, wenn die Stabkräfte berechnet werden.

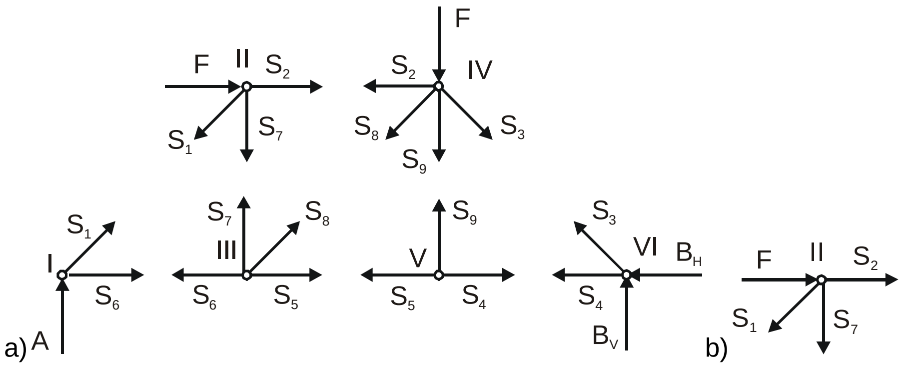


Bild 6.6 Schnittbild; a) Explosionsschnittbild; b) am Knoten II

Schnittbild am Knoten II zeigt ein solches Einzelschnittbild (Bild 6.6 b). Es liegt ein zentrales Kraftsystem vor. Die Stabkräfte stehen im Gleichgewicht, wenn die Resultierende, beziehungsweise die Haltekraft zu Null wird.

An jedem einzelnen Knoten lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$\rightarrow$: $\Sigma F_x = 0,$ (6.1)

$\uparrow$: $\Sigma F_y = 0.$ (6.2)

Im vorliegendem Beispiel ergeben sich zwölf Gleichungen für zwölf Unbekannte, die neun Stabkräfte und drei Lagerkräfte.

Wenn ein statische bestimmtes Fachwerk vorliegt, lassen sich alle Stabkräfte und Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen.

Um die Fachwerke besser klassifizieren zu können, wird der Aufbau eines Fachwerks untersucht und nach Gruppen unterteilt. Die meisten Fachwerke werden nach dem 1. Bildungsgesetz aufgebaut.

1. Bildungsgesetz

Drei Fachwerkstäbe, die durch Knoten miteinander verbunden sind (Bild 6.7 a), bilden eine statisch bestimmte Scheibe, zum Beispiel Scheibe 1. Von einer Scheibe ausgehend wird durch Anbringen zwei weiterer Stäbe (Stab 4 und 5) eine weitere statisch bestimmte Scheibe, zum Beispiel Scheibe 2, gebildet.

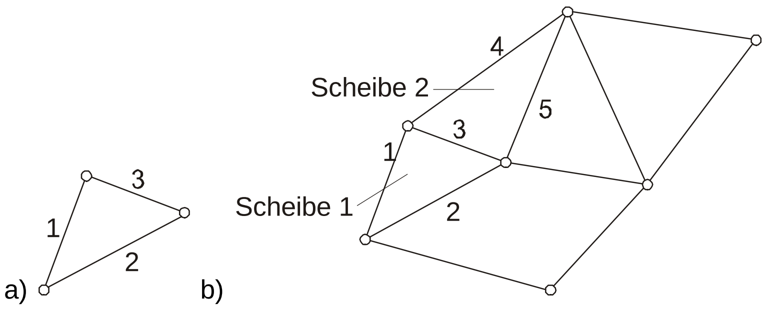


Bild 6.7 a) Statische bestimmte Scheibe; b) Scheibenbildung, beginnend mit der Scheibe 1 und Stab 4 und 5.

Es sind die einfachsten Fachwerke, die auch bei der Berechnung , zum Beispiel durch Schneiden an den Knoten oder durch den CREMONAplan, keine Schwierigkeiten machen.

2. Bildungsgesetz

Zwei Fachwerkscheiben 1 und 2, die nach dem 1. Bildungsgesetz aufgebaut sind, werden durch drei weitere Stäbe verbunden, die nicht durch einen Punkt gehen dürfen.

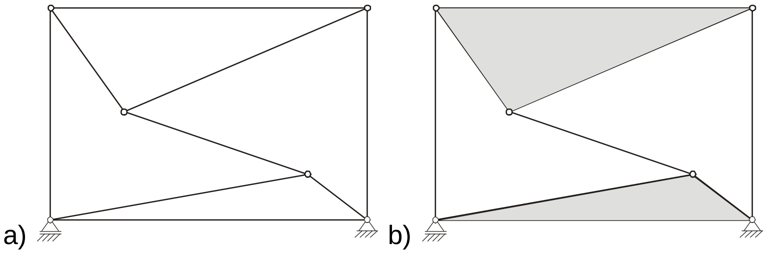


Bild 6.8 Fachwerk nach dem 2. Bildungsgesetz; a) Fachwerkstäbe, die b) zwei Scheiben bilden.

Hierbei muss immer kontrolliert werden, ob das Fachwerk kinematisch ist.

Ein Fachwerk nach dem 1. und 2. Bildungsgesetz kann durch Wegnahme und Wiedereinfügen eines Stabes an anderer Stelle in ein anderes statisch bestimmtes Fachwerk verwandelt werden. Das ist die Gruppe von Fachwerken nach dem 3. Bildungsgesetz.

3. Bildungsgesetz

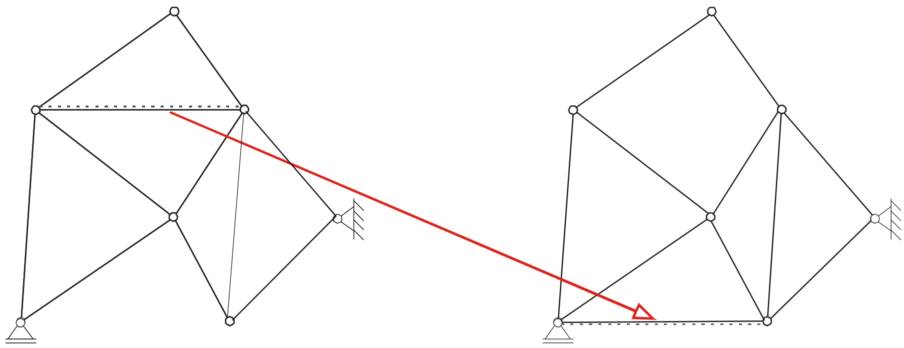


Bild 6.9 Fachwerk nach dem 3. Bildungsgesetz

Auch hier ist immer zu prüfen, ob das neu gebildete Fachwerk kinematisch ist.

Als weitere, große Gruppe gibt es die zusammengesetzten Fachwerke.

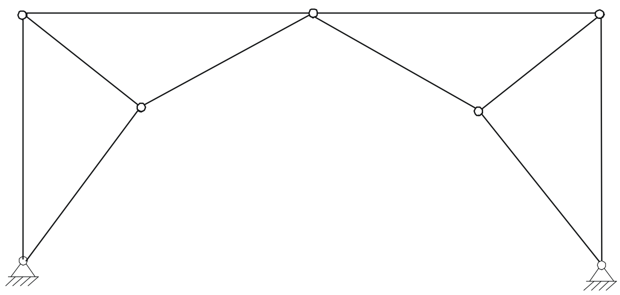


Bild 6.10 Zusammengesetztes Fachwerk

Im obigen System bilden die zwei Scheiben, die jeweils nach dem 1. Bildungsgesetz aufgebaut sind, einen Dreigelenkbogen.

Bei einer Vorbetrachtung können vorab Stäbe sofort als Nullstäbe erkannt oder , wenn sie sich in der Berechnung als Nullstäbe ergeben, überprüft werden. Das sind bei einer gegebenen Belastung unbelastete Stäbe (Tabelle 6.1).

Sie werden nur für diesen Lastfall zu Null. Jeder andere Lastfall kann andere Stabkräfte zur Folge haben. Deshalb dürfen sie niemals aus dem Fachwerk entfernt werden.

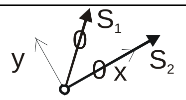
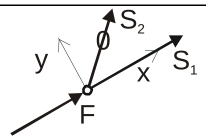
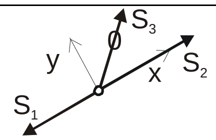
Als Lösungswege für die Berechnung der Lager- und Stabkräfte eines Fachwerks bieten sich drei Methoden an:

- analytisch durch knotenweises Schneiden (für Systeme nach dem 1. Bildungsgesetz und wenn alle Stabkräfte gesucht werden)

- graphisch nach dem CREMONAplan (für Systeme nach dem 1. Bildungsgesetz und wenn alle Stabkräfte gesucht werden)

- RITTERsches Schnittverfahren (für Systeme nach dem 1., 2. und 3. Bildungsgesetz und wenn einzelne Stabkräfte gesucht werden).

Tabelle 6.1 Definition der Nullstäbe

Bedingung 1	**Bedingung 2**	**Bedingung 3**
Keine äußere Kraft tritt am Knoten auf.	Die äußere Kraft F wirkt in Richtung einer der Stabachse.	Zwei Stäbe liegen in derselben Richtung und ein dritter schließt an demselben Knoten in anderer Richtung an.
		
Beweis		
$\nwarrow$: $S_{1y} = 0$. $\nearrow$: $S_{1x} + S_2 = 0$. Damit wird die y- Komponente der Stabkraft S_1 zu Null, das heißt, damit wird auch ihre Horizontalkomponente S_{1x} zu Null. Wenn keine äußere Kraft angreift, ist auch die Stabkraft Null.	$\nearrow$: $F + S_1 + S_{2x} = 0$. $\nwarrow$: $S_{2y} = 0$. Damit wird die y- Komponente der Stabkraft S_2 zu Null, dann ist auch die x-Komponente von der Stabkraft S_2 Null. Die Stabkraft S_1 nimmt die Kraft F auf.	$\nearrow$: $- S_1 + S_2 + S_{3x} = 0$. $\nwarrow$: $S_{3y} = 0$. Damit wird die y- Komponente der Stabkraft S_3 zu Null, dann ist auch die x-Komponente von der Stabkraft S_3 Null. Die Stabkraft S_1 ist gleich der Stabkraft S_2.

6.3 Analytische Lösung

Bei dieser Lösung betrachtet man das Fachwerk zuerst als Gesamtsystem und löst mit den drei Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem die Auflagerkräfte.

Beispiel

- Statisch bestimmtes Fachwerk nach dem 1. Bildungsgesetz
- Bestimmung der Lagerkräfte durch die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem
- Bestimmung der Stabkräfte durch den CREMONAplan

Ein Fachwerkträger wird durch drei Kräfte F_1, F_2 und F_3 belastet (Bild 6.11).

gegeben: a, F_1, F_2, F_3

gesucht: Bestimmung der Lager- und Stabkräfte